Année académique 2024-2025

T.D de RO : PROGRAMMATION LINÉAIRE

Exercice 1. *Répondre par vrai ou faux les assertions suivantes*

1. *Toute solution de base est réalisable.*
2. *Dans le cas standard, toute solution réalisable est une solution de base.*
3. *Un vecteur est une solution de base si toutes les contraintes sont vérifiées.*
4. *Dans une solution dégénérée toutes les variables de base sont nulles.*
5. *Dans une solution de base lorsque toutes les variables de base sont nulles alors la solution de base est le vecteur nul.*
6. *Dans le cas standard une solution de base est dégénérée si plus de n-m variables sont nulles. (n est le nombre de variables de décisions et m le nombre de contraintes en terme d'égalité).*

Exercice 2. *On considère le programme linéaire*

$$(PL)\left\{\begin{array}{lcccl} Min & 5x_1 & -x_2 & +x_3 & \\ s.c & 4x_1 & +x_2 & & \geqslant 3, \\ & x_1 & -2x_2 & +x_3 & \leqslant 10, \\ & & 3x_2 & -x_3 & = -10 \\ & & x_1, & x_3 & \geqslant 0. \end{array}\right.$$

1. *Vérifier que le vecteur x tel que $x' = (2; -3; 1)$ est une solution réalisable pour ce problème. Donner le coût de la fonction objectif correspondant à cette solution.*
2. *Écrire ce programme sous la forme standard (FS).*
3. *Déterminer deux solutions réalisables du problème sous forme standard.*

Exercice 3. *Maximiser la fonction $Z = 11x_1 + 16x_2 + 15x_3$ sous les contraintes*

$$(P)\left\{\begin{array}{c} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 240, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 138, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 144 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Sachant que maximiser Z sous certaines contraintes revient à minimiser $-Z$ sous les mêmes contraintes (en effet $\max(Z) = -\min(-Z)$), résoudre le problème ci-dessus. On déterminera la solution optimale du problème (P), la matrice de base optimale et le coût optimal de la fonction objectif du problème (P).

Exercice 4. *Un problème de programmation linéaire est exprimé par le modèle ci-dessous.*

$$(P)\left\{\begin{array}{cc} \textit{Maximiser} & Z = 12x_1 + 8x_2 + 10x_3 \\ \textit{sous les contraintes} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 120, \\ & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 300, \\ & x_1 + x_2 \leqslant 50 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Sachant que maximiser Z sous certaines contraintes revient à minimiser $-Z$ sous les mêmes contraintes (en effet $\max(Z) = -\min(-Z)$), résoudre le problème ci-dessus. On déterminera la solution optimale du problème (P), la matrice de base optimale et le coût optimal de la fonction objectif du problème (P).

Exercice 5. *On considère le programme linéaire*

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} Min & -x_1 - x_2 + x_3 \\ S.C & 2x_1 - x_3 \geqslant 6, \\ & x_2 - 2x_3 \leqslant -2, \\ & x_2 - x_3 \leqslant 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

et les vecteurs $a^T = (4, 1, 2)$ *et* $b^T = (5, 4, 3)$.

1. *Les vecteurs a et b sont-ils des solutions réalisables du programme ? Justifier.*
2. *Écrire* (P) *sous la forme standard* (FS).
3. *Construire si possible une ou deux solutions réalisables de* (FS). *Ces solutions sont-elles de base ? Sont-elles dégénérées ? Justifier.*

Exercice 6. *Soit le problème de programmation linéaire suivant sous forme standard. Le polyhèdre associé à ce problème est sous la forme* $\{x \in \mathbb{R}^6 / Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ *où* A *est une matrice dont les lignes sont linéairement indépendantes.*

$$(FS)\left\{\begin{array}{lcccccccccccc} Min & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & & & & & & \\ s.c & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & = & 20, \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & = & 20, \\ & -2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & & & - x_6 & = & -20 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & x_6 & \geqslant & 0 \quad . \end{array}\right.$$

1. *Montrer que les colonnes* A_1, A_4, *et* A_6 *et les colonnes* A_4, A_5, *et* A_6 *sont linéairement indépendantes*
2. *Soient* $B = [A_1\, A_4\, A_6]$ *et* $B' = [A_4\, A_5\, A_6]$ *deux matrices de base.*
   (a) *Déterminer les solutions de base associées à chacune de ces matrices de base. Donner le coût correspondant à chacune de ces solutions.*
   (b) *Ces solutions sont-elles réalisables ? Sont-elles dégénérées ou pas ?*
3. *Sachant que les variables* x_4, x_5 *et* x_6 *sont des variables d'écarts dans le problème sous forme standard, donner la forme du problème original (PO).*
4. *Déduire de la question 2.(a), une solution non nulle du problème original (PO). Cette solution est-elle dégénérée ou pas ?*

Exercice 7. *Soit le problème de programmation linéaire suivant sous forme standard. Le polyhèdre associé à ce problème est sous la forme* $\{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = b,\ x \geqslant 0\}$.

$$(P)\left\{\begin{array}{lcccccccc} Min & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & & \\ s.c & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ & -x_1 & + & x_2 & & & = & -2, \\ & 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geqslant & 0 & . \end{array}\right.$$

1. *Vérifier que la deuxième ligne de la matrice de cette forme standard est redondante.*
2. *Donner la forme standard la plus simple de (P). On note* A' *la matrice correspondante à la nouvelle forme standard.*

3. *On considère les matrices* $B = [A'_1\ A'_2]$, $B' = [A'_1\ A'_3]$ *et* $B'' = [A'_2\ A'_3]$.
   (a) *Vérifier que ces matrices sont des matrices de base.*
   (b) *Pour chaque matrice de base, déterminer la solution de base de* (P) *qui lui est associée. Donner la nature (est-elle réalisable, dégénérée ?) de cette solution.*

Exercice 8. *Résoudre par la méthode du simplexe les problème suivants*

$$\begin{array}{ll} Min & -3x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ \textit{sous les contraintes} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 4, \\ & 2x_1 + 3x_3 \leqslant 5, \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 7, \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min & -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ sous\ .c & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 10, \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 10, \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ & x_1,\ x_2, x_3 \geqslant 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min & -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ \textit{sous les contraintes} & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 6, \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0. \end{array}$$

Exercice 9. *On considère le problème de programmation linéaire suivant*

$$\left.\begin{array}{ll} Min & -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ sous.\ c & -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geqslant -8, \\ & -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 \geqslant -7, \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0. \end{array}\right. (P)$$

1. *Écrire le dual (D) du problème de programmation linéaire (P).*
2. *Vérifier que vecteur* $x^{*'} = (1;1)$ *est une solution réalisable de (D).*
3. *Déterminer la solution optimale du problème (P) par la méthode du simplexe.*
4. *Vérifier que le vecteur* $x^{*'}$ *de la question 2./ est optimale.*

Exercice 10. *On considère le problème de programmation linéaire suivant :*

$$\begin{array}{ll} Min & -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ sous.\ c & 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ & -4x_1 + 3x_3 \leqslant 2, \\ & 3x_1 - 2x_2 - x_3 \leqslant 5, \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0. \end{array}$$

La solution $x^{*'} = (0;0;4)$ *est-elle optimale ?*

Exercice 11. *On considère le programme linéaire suivant :*

$$\begin{array}{ll} Min & -7x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 \\ sous\ .c & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leqslant 4, \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 3, \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leqslant 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leqslant 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0. \end{array}$$

La solution $x^{*'} = (0; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}; 0)$ *est-elle optimale ?*

Exercice 12. *La solution* $x^{*'} = (\frac{1}{7}; 0; \frac{4}{7}; 0)$ *est-elle une solution optimale du programme linéaire suivant ? Justifier votre réponse.*

$$\begin{array}{ll} \textit{Min} & -6x_1 - 8x_3 - 4x_4 \\ \textit{sous .c} & 7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leqslant 5, \\ & 4x_1 + x_2 + 6x_3 + 10x_4 \leqslant 4, \\ & 9x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 10x_4 \leqslant 3 \\ & 3x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0. \end{array}$$

Exercice 13. *En résolvant par la méthode du simplexe un problème de minimisation sous forme standard, on arrive au tableau suivant*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-10	δ	-2	0	0	0
4	-1	-2	1	0	0
1	α	-4	0	1	0
β	γ	3	0	0	1

1. Préciser les variables de base et les variables hors base de ce tableau.
2.Les réels α, β, γ, δ, η *sont des paramètres inconnus. Pour chacune des assertions suivantes, trouver des conditions sur les paramètres pour lesquelles l'assertion est vraie.*
(a) Le coût optimal est $-\infty$.
(b) La solution en cour est une solution réalisable.(c) La solution en cour est une solution dégénérée.
(d) La variable entrante est x_1 *et il y'a deux variables qui sont éligibles de sortir de la base. Préciser ces variables éligibles de sortir.*
(e)La variable entrante est x_1 *si la règle utilisée pour la variable entrante est "la variable entrante est celle qui a le coût réduit le plus négative".*

Exercice 14. *(10pts)*
On considère un problème de programmation linéaire sous forme standard qui est décrit par le tableau suivant

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	0	0	0	$(k-2)$	3	m	n
$x_2 =$	j	0	1	0	i	1	0	3
$x_3 =$	2	0	0	1	-2	2	l	-1
$x_1 =$	3	1	0	0	0	-1	2	1

Les réels i, j, k, l, m, n *sont des paramètres inconnus.*

1. *Pour chacune des assertions suivantes, trouver les intervalles des valeurs des paramètres pour lesquelles l'assertion est vraie.*
   (a) *La solution de base en cours est réalisable, non optimale et les variables éventuelles entrantes sont* x_6 *et* x_7.
   (b) *La solution de base en cours est réalisable et le tableau indique que le coût optimale est* $-\infty$.
   (c) *La solution de base correspondante est réalisable,* x_6 *est une variable candidate pour entrer dans la base, et lorsque* x_6 *est la variable entrante,* x_3 *sort de la base.*
   (d) *La solution de base en cours est réalisable,* x_7 *est une variable candidate pour entrer dans la base, mais si elle rentre, la solution et la valeur de la fonction objective restent inchangées.*

2. *On prend $i = 1$, $j = 0$, $k = 4$, $l = \frac{4}{3}$, $m = -\frac{4}{3}$, $n = -2$. Résoudre ce problème en utilisant la la règle de Bland.*

Exercice 15. *En résolvant par la méthode du simplexe un problème de minimisation sous forme standard, on arrive au tableau suivant*

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	-10	-1	-2	0	0	0
$x_3 =$	4	-1	2	1	0	0
$x_4 =$	1	1	-4	0	1	0
$x_5 =$	6	6	3	0	0	1

1.Résoudre la suite du problème en utilisant la règle de Bland.
2.Résoudre la suite du problème en utilisant la règle lexicographique.

TD de RO : Graphes et applications

Exercice 16. *À partir de n intervalles $I_1, \ldots, I_n$ de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ on peut construire un graphe G où les n sommets $1, \ldots, n$ de G représentent respectivement les intervalles $I_1, \ldots, I_n$. Dans un tel graphe, deux sommets i et j, $i \neq j$, sont adjacents si et seulement si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Ce graphe est appelé graphe d'intervalles.*
On considère les intervalles $I_1 =]-\infty; 0[$, $I_2 = [0; 1]$, $I_3 =]1; 3[$, $I_4 =]-1; \frac{1}{2}]$, $I_5 =]\frac{1}{2}; 5[$, $I_6 =]0,5; 1[$, $I_7 =]9; +\infty[$.

1. *Construire le graphe d'intervalles G correspondant à ces intervalles.*
2. *Quelle la nature de ce graphe.*
3. *Déterminer la matrice d'adjacence de ce graphe.*

Exercice 17. *Trois professeurs P_1, P_2, P_3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C_1, C_2, C_3.*
P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et 1 heure de cours à C_2 ;
P_2 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure de cours à C_2 et 1 heure de cours à C_3 ;
P_3 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure de cours à C_2 et 2 heures de cours à C_3.

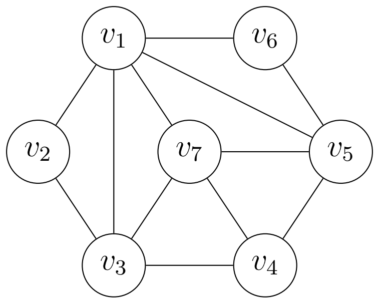
1. *Représenter cette situation par un graphe.*
2. *Quel type de graphe obtenez-vous ?*
3. *Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ?*
4. *Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.*

Indications : L'ensemble V des sommets est constitué des professeurs et des classes. Chaque arête correspond à **une heure. Nous identifions une plage horaire à une couleur.**

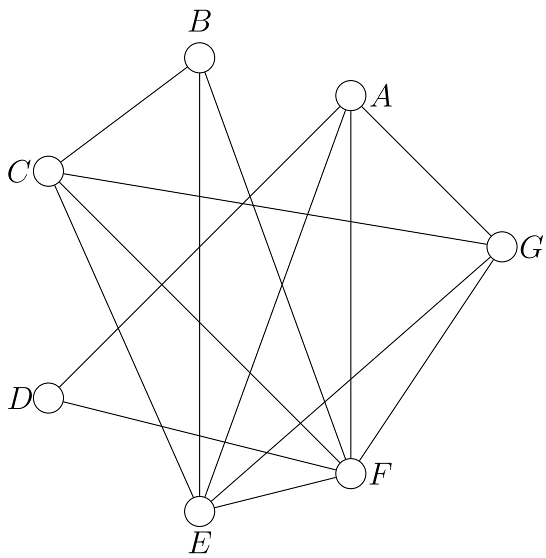
Exercice 18. *Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.*

1. *Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.*
2. *Quel type de graphe obtenez-vous ?*
3. *Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi.*
4. *Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches si chaque joueur ne joue qu'un match par jour.*

Exercice 19. *Donner un encadrement du nombre chromatique de ce graphe*



Exercice 20. *Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlane (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G). Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.*

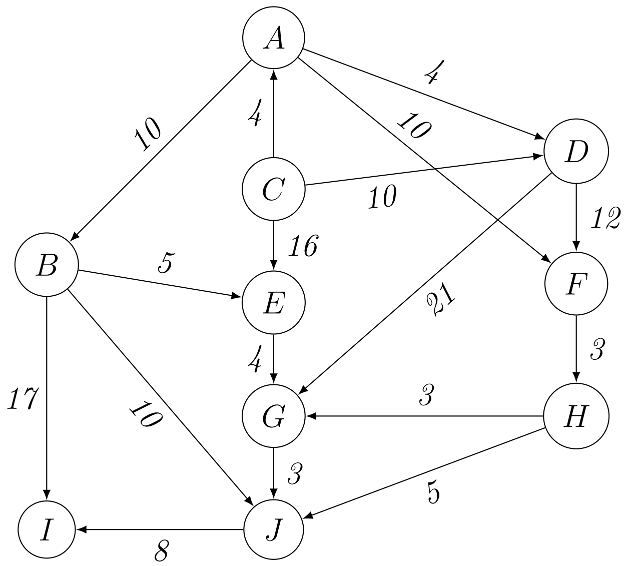


1. *Quelle est la nature du graphe G.*
2. *Déterminer une clique de G ayant le plus grand ordre.*
3. *Déterminer un encadrement du nombre chromatique $\chi(G)$ de G.*
4. *En utilisant l'algorithme de Welsh-Powell, colorer le graphe G et préciser la valeur de $\chi(G)$.*
5. *Combien de concerts l'organisateur doit-il prévoir au minimun ? Proposer une répartition des musiciens pour chacun de ces concerts.*

Exercice 21. *Pour le bon fonctionnement de son entreprise, un directeur décide que ses employés Kpatcha, Joseph, Noe, Yvette, Elom et Wenpwire participent à une série de formations organisées en Comptabilité (C), Informatique (I), Droit (D), Anglais (A) et Marketing. La formation dans chaque domaine doit durée 1 heures et les employés n'ont pas le même niveau dans les domaines. Kpatcha doit suivre la comptabilité, l'informatique et le droit. Joseph ne doit suivre que la formation d'informatique. Noe doit suivre les formations de comptabilité et de droit. Yvette est appelée à suivre l'informatique, droit et anglais. Elom doit se faire former en anglais et marketing et Wenpwire en droit et marketing. Le but de l'exercice est de déterminer la durée minimale dans laquelle cette session de formation peut tenir pour que tous les employés soient formés comme prévu.*

1. *Construire le graphe G qui défini le plan de formation souhaité par le directeur.*
2. *Quelle type de graphe obtient t-on ?*
3. *Dessiner un graphe G′ dont les sommets sont les modules de formations et dont les arêtes décrivent les formations qui ne peuvent se produire au même moment.*
4. *Quelle la nature de ce graphe.*
5. *Déterminer alors la durée minimale de réalisation de la section de formation et donner si possible les formations qui peuvent se produire au même moment.*

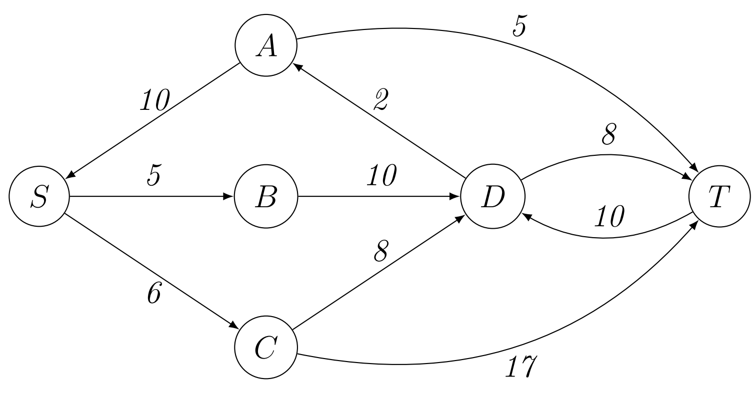
Exercice 22. *On considère le graphe orienté suivant dont chaque arc porte un poids.*



À l'aide de l'algorithme de Djikstra, déterminer le plus court chemin qui mène de C à I et préciser sa longueur.

Exercice 23. *Un livreur ayant quatre clients A, B, C, D prépare sa tournée. II désir passer par certains de ses clients en partant de S pour arriver au point T. Les liaisons possibles sont représentées sur le graphe G ci-dessous dont chaque arc est muni d'un poids qui représente la durée, en minutes, qui sépare deux sommets.*

1. *À l'aide de l'algorithme de Djikstra déterminer e chemin qu'il doit emprunter pour minimiser la durée totale du trajet de S à T ? Préciser les clients qu'il pourra visiter dans ce cas.*
2. *Préciser le chemin qu'il va emprunter à son retour. Quelle est la durée de ce trajet ?*

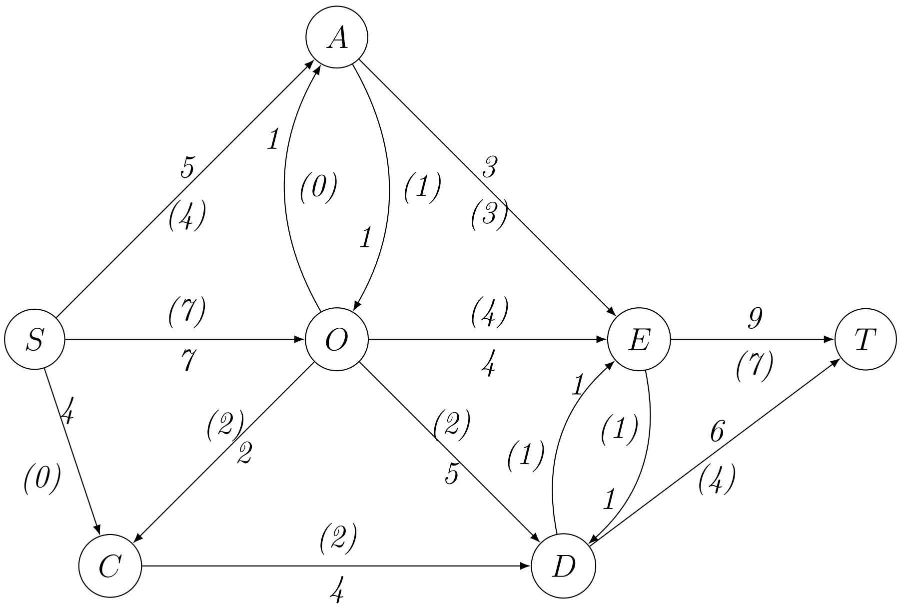


Exercice 24. .
A, B, C, D, E, F, G, H, et I *sont les tâches à exécuter pour la réalisation d'un projet P. Dans le tableau ci-dessous, chaque tâche a été mentionnée avec sa durée d'exécution et la ou les tâche(s) antérieure(s) qui la précède(ent).*

tâches	*tâches antérieures*	*Durée (jours)*
A	-	*3*
B	-	*9*
C	-	*5*
D	***A***	*8*
E	***B***	*4*
F	***B***	*7*
G	***B***	*20*
H	***C, F***	*6*
I	***D, E***	*5*

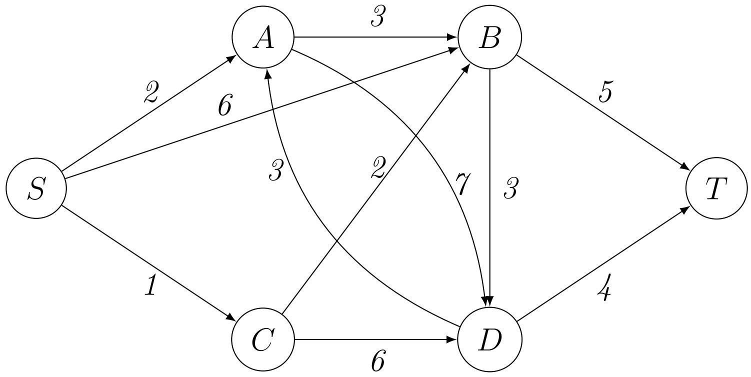
1. *Proposer le graphe PERT qui modélise ce projet.*
2. *Déterminer les dates au plus tôt et les dates au plus tard de chacun des évènements de début et de fin d'une tâche.*
3. *Préciser les tâches critiques de ce projet. Quelle est le chemin critique.*
4. *Déterminer la durée optimale de réalisation du projet.*

Exercice 25. *On considère le réseau suivant. Les nombres entre parenthèses représentent les flots. Ceux qui ne sont pas dans les parenthèses sont les capacités.*



1. *Déterminer le graphe résiduel correspondant à ce réseau.*
2. *Déterminer tous les chemins améliorant de ce réseau.*

Exercice 26. *Un serveur S est connecté à une machine T par un réseau avec les nœuds A, B, C et D. Les capacités de connexion entre les nœuds sont (en Mbit/s). Ce système informatique est représenté par le graphe orienté suivant :*



L'utilisateur de la machine T télécharge un très grand fichier du serveur S. On veut déterminer la valeur du flot qui maximise le passage des données dans ce réseau.

1. *Comment appelle-t-on ce problème qu'on veut résoudre ? Préciser l'algorithme du cours permettant de résoudre ce problème.*
2. *Appliquer cet algorithme pour déterminer le débit maximal de données qui doit circuler dans ce réseau.*